第 4 章　三角関数

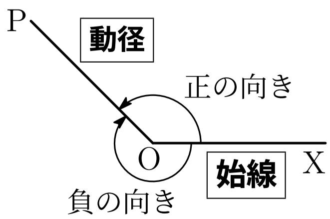
4.1　三角関数

4.1.1　角の拡張

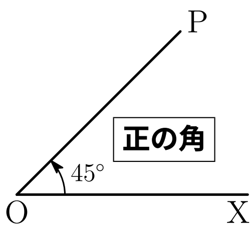
時計の針を 5 分進めても 5 分もどしても，長針は 30° だけ回転するが，針が回転する向きは逆である．ここでは，図形的な角を拡張して回転量としての角を考えてみよう．

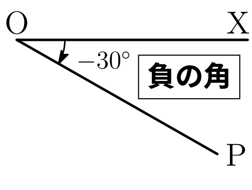
A 一般角

平面上で，点 O を中心に半直線 OP を回転させるとき，この半直線 OP を**動径**という．また，動径の最初の位置を示す半直線 OX を**始線**という．



時計の針の回転と逆の向きを**正の向き**といい，始線 OX から正の向きに測った角を**正の角**という．また，時計の針の回転と同じ向きを**負の向き**といい，始線 OX から負の向きに測った角を**負の角**という．



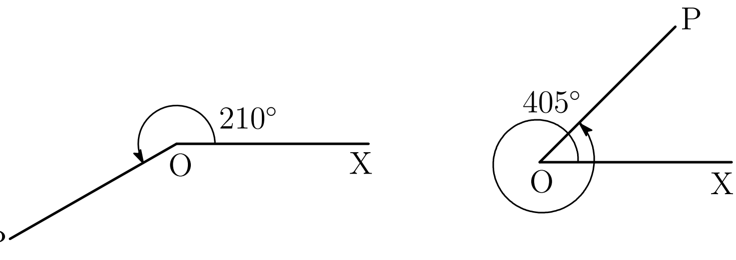


正の角は，たとえば +45° または 45° と表す．負の角は，たとえば −30° と表す．また，動径が正の向きに 1 回転したときは 360°，2 回転したときは 720°，負の向きに 1 回転したときは −360° の角を表す．

このように回転の向きと大きさを表した角を**一般角**という．

一般角 θ に対して，始線 OX から角 θ だけ回転した位置にある動径 OP を，**$\boldsymbol{\theta}$ の動径**という．

例 4.1　210°，405° の動径



練習 4.1　次の角の動径を図示せよ．

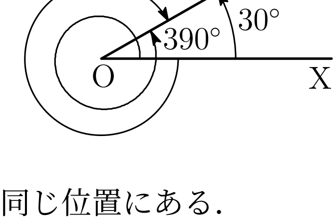
(1)　260°　　(2)　$-45°$　　(3)　420°

(4)　765°　　(5)$-240°$

B 動径の表す角

動径は1回転360°でもとの位置にもどるから，たとえば30° の動径と

$$30° + 360° = 390°,$$
$$30° + 360° \times 2 = 750°$$
$$30° + 360° \times (-1) = -330°$$



のような角 390°，750°，$-330°$ の動径は，すべて同じ位置にある．

一般に，次のことがいえる．ただし，n は整数である．

> 動径 OP と始線 OX のなす角の 1 つを α とすると，動径 OP の表す角は $\boldsymbol{\alpha + 360^\circ \times n}$ である．

練習 4.2 次の角のうち，その動径が 60° の動径と同じ位置にある角はどれか．

$$300^\circ,\ 420^\circ,\ 1040^\circ,\ -60^\circ,\ -300^\circ,\ -780^\circ$$

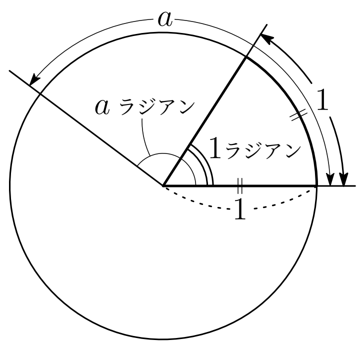
C 弧度法

30°，-120° などのようにこれまで使ってきた度 ($^\circ$) を単位とする角の表し方を，**60 分法**または**度数法**という．

これに対して，弧の長さに着目した角の測り方がある．

半径 1 の円において，半径と同じ長さ 1 の弧に対する中心角の大きさを **1 ラジアン**または **1 弧度**という．長さ a の弧に対する中心角の大きさは，a ラジアンである．

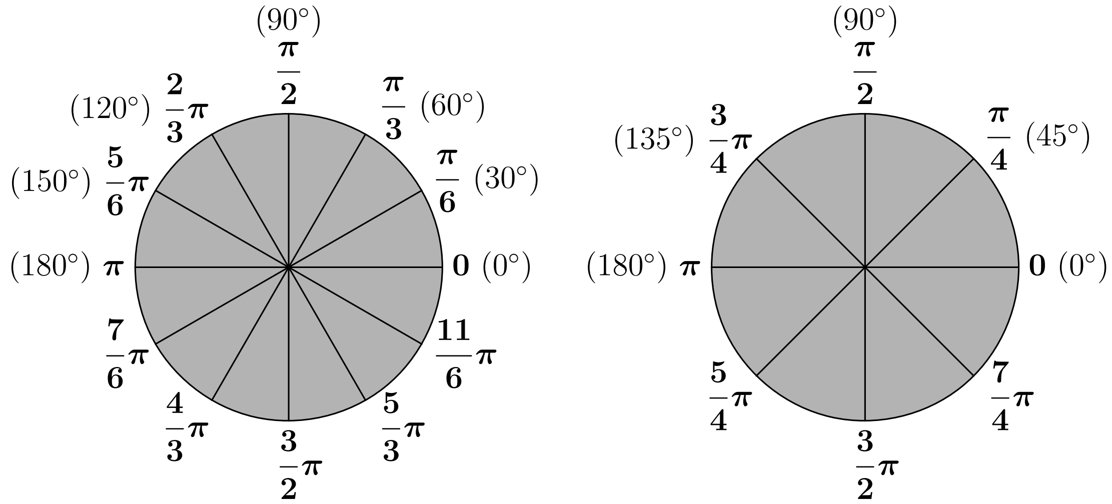
1 ラジアンを単位とする角の表し方を**弧度法**という．



練習 4.3 次のことを確かめよ．

(1) 1 ラジアンは $\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ$ (2) 360° は 2π ラジアン

動径の回転角におけるラジアンと度の換算 (0°から 180°まで)



[注意] 今後，弧度法では，ふつう単位のラジアンを省略する．

練習 4.4 次の角を弧度法で表せ．

(1)　210°　　(2)　225°　　(3)　240°

(4)　270°　　(5)　330°

D 弧度法と扇形

弧度法を用いると，扇形について，次のことが成り立つ．

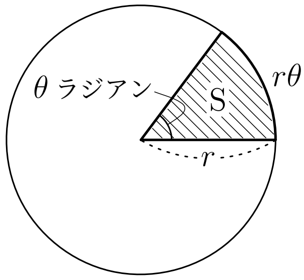
扇形の弧の長さと面積

半径 r，中心角 θ(ラジアン) の扇形の弧の長さ l，面積 S は

$$\boldsymbol{l = r\theta}, \qquad \boldsymbol{S = \frac{1}{2}r^2\theta} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{S = \frac{1}{2}lr}$$

[証明] 半径1の円では，中心角が θ ラジアンの弧の長さは θ であるから，半径が r の円では，$l = r\theta$ となる．
扇形の面積は，中心角の大きさに比例するから

$$S = \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}lr \qquad \textbf{[証終]}$$



例 4.2 半径10，中心角 $\dfrac{\pi}{6}$ の扇形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \times 10^2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{25}{3}\pi$$

練習 4.5 次のような扇形の弧の長さと面積を求めよ．

(1) 半径4，中心角 $\dfrac{\pi}{3}$

(2) 半径6，中心角 $\dfrac{7}{6}\pi$

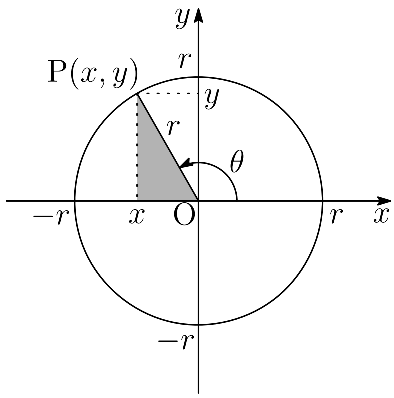
4.1.2　三角関数とそのグラフ

三角比 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ における θ を一般角 θ に拡張してみよう．

A 三角関数

座標平面上で，右の図のように x 軸の正の部分に始線をとり，角 θ の動径と原点を中心とする半径 r の円との交点Pの座標を $(x,\ y)$ とする．

このとき，$\dfrac{y}{r}$，$\dfrac{x}{r}$，$\dfrac{y}{x}$ の値はどれも円の半径 r には関係なく，θ だけで決まる．



そこで，三角比と同様に

$$\boldsymbol{\sin\theta = \frac{y}{r},\quad \cos\theta = \frac{x}{r},\quad \tan\theta = \frac{y}{x}}$$

と定め，それぞれ一般角 θ の**正弦**，**余弦**，**正接**という．

これらはどれも θ の関数であり，まとめて θ の**三角関数**という．

[注意] 点Pが y 軸上にくるような角 θ に対しては，$\tan\theta$ は定義されない．

例 4.3　$\boldsymbol{\dfrac{4}{3}\pi}$ の正弦，余弦，正接

右の図で，円の半径が $r=2$ のとき，

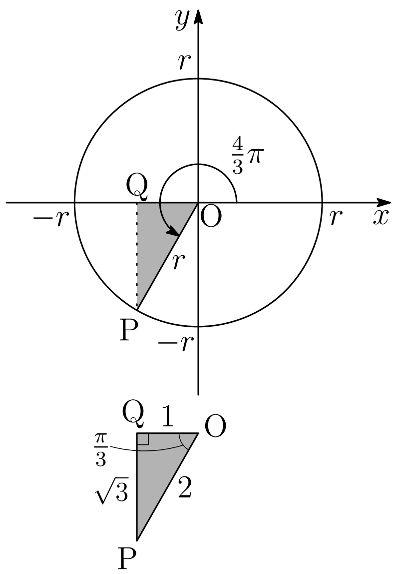
点Pの座標は $(-1,-\sqrt{3})$ である．

そこで，$x=-1$，$y=-\sqrt{3}$ として

$$\sin\frac{4}{3}\pi = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4}{3}\pi = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{4}{3}\pi = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$



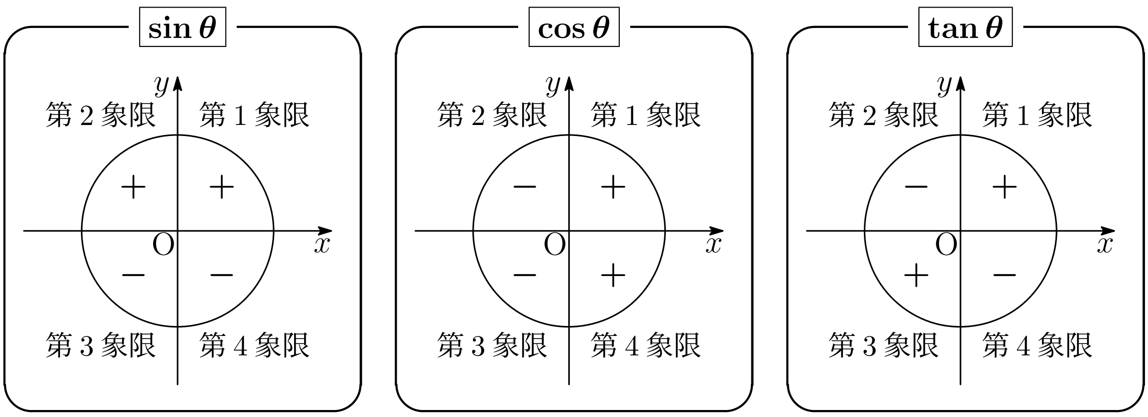
練習 4.6 次の θ について，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を，それぞれ求めよ．

(1) $\theta = \dfrac{5}{4}\pi$

(2) $\theta = \dfrac{11}{6}\pi$

(3) $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$

三角関数 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値の符号は，θ の動径がどの象限にあるかで決まる．これを図で示すと，次のようになる．



練習 4.7 次のような θ の動径は，第何象限にあるか.

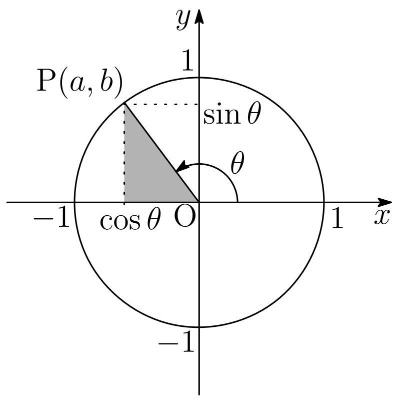
(1) $\sin\theta < 0$ かつ $\cos\theta > 0$ (2) $\cos\theta < 0$ かつ $\tan\theta > 0$

B 三角関数のグラフ

原点を中心とする半径 1 の円を**単位円**という.

角 θ の動径と単位円の交点を $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると，$\sin\theta$，$\cos\theta$ は次のようになる.

$$\sin\theta = \frac{b}{1} = b, \quad \cos\theta = \frac{a}{1} = a$$

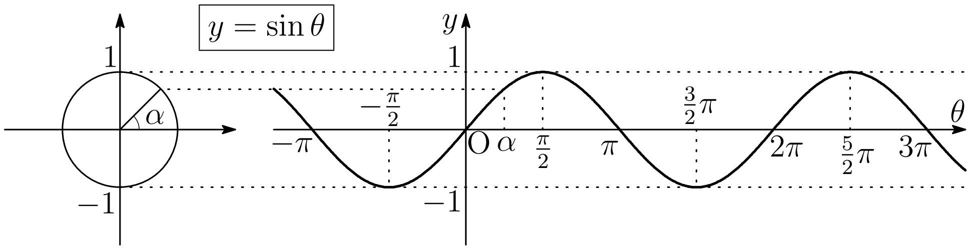


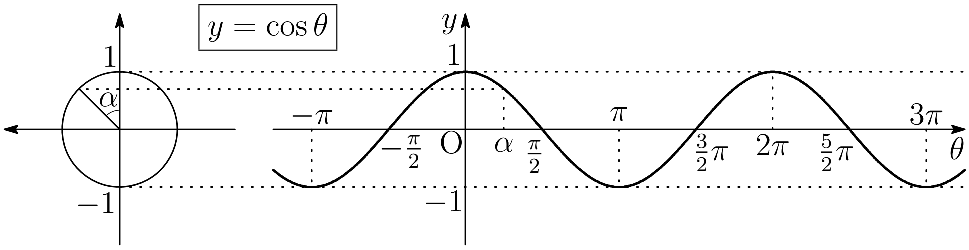
すなわち，右の図で次のことがいえる.

［1］$\sin\theta$ の値は，P の y 座標に等しい.

［2］$\cos\theta$ の値は，P の x 座標に等しい.

［1］,［2］を使って，関数 $y = \sin\theta$，$y = \cos\theta$ のグラフをかくと，次のようになる[1] .





[1] θ の単位はラジアンであり，θ 軸上の目盛りはラジアンでとっている.
$y = \sin\theta$ のグラフの形の曲線を**正弦曲線**または**サインカーブ**という. グラフのかき方から，
$y = \cos\theta$ のグラフも正弦曲線であることがわかる.

動径は1回転してもとの位置にもどるから，次のことが成り立つ．

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta, \qquad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

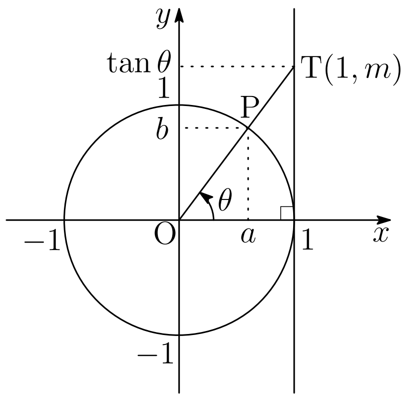
この性質から，$\sin\theta$，$\cos\theta$ は 2π の**周期**をもつという．

グラフについていうと，$y = \sin\theta$ のグラフも $y = \cos\theta$ のグラフも，2π ごとに同じ形を繰り返す．

さらに，次のことがいえる．

> **1** $\boldsymbol{y = \sin\theta}$ **のグラフは，原点について対称である．**
> **2** $\boldsymbol{y = \cos\theta}$ **のグラフは，$\boldsymbol{y}$ 軸について対称である．**

右の図のように，角 θ の動径と単位円の交点を $\mathrm{P}(a,\ b)$，直線 $x = 1$ との交点を $\mathrm{T}(1,\ m)$ とすると

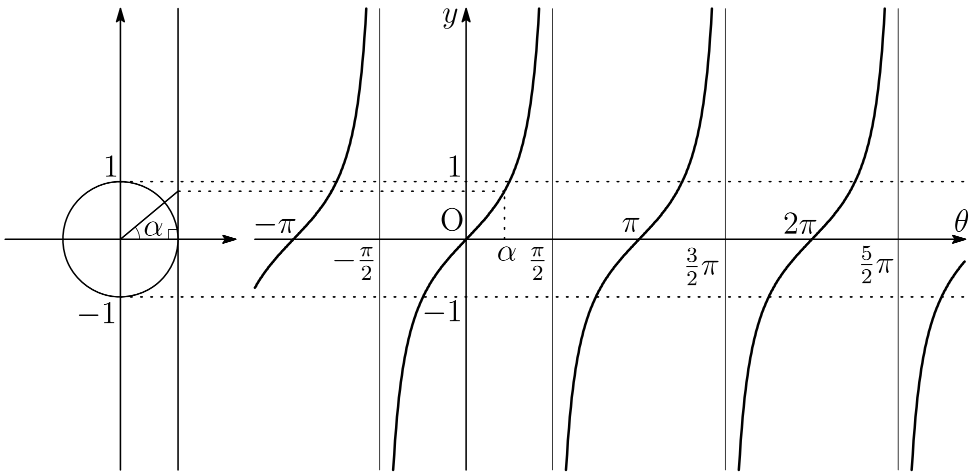


$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{m}{1} = m$$

である．よって，次のことがいえる．

> $\tan\theta$ の値は，T の y 座標に等しい．

このことを使って，関数 $y = \tan\theta$ のグラフをかくと次のようになる．



$\tan\theta$ は $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ では定義されないが，$y = \tan\theta$ のグラフは θ が $\dfrac{\pi}{2}$ に限りなく近づくと，直線 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ に限りなく近づく．

グラフが限りなく近づく直線を，そのグラフの**漸近線**（ぜんきんせん）という．

関数 $y=\tan\theta$ には，次のような性質がある．

1　グラフは原点について対称で，π ごとに同じ形を繰り返す．
また，直線 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ などを漸近線としてもつ．

2　$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$ が成り立つ．すなわち，$\tan\theta$ は π の周期をもつ．

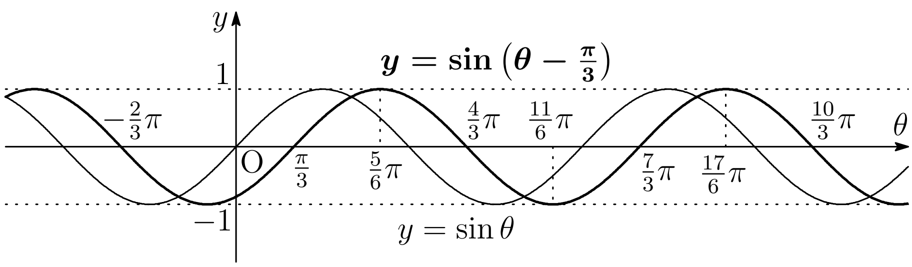
三角関数の周期，値域，グラフの対称性については，次のようになる．

	$y=\sin\theta$	$y=\cos\theta$	$y=\tan\theta$
周期	2π	2π	π
値域	$-1\leqq y\leqq 1$	$-1\leqq y\leqq 1$	実数全体
グラフの対称性	原点について対称	y 軸について対称	原点について対称

C いろいろな三角関数のグラフ

例 4.4　$y=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフ

このグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動したもので，次のようになる．

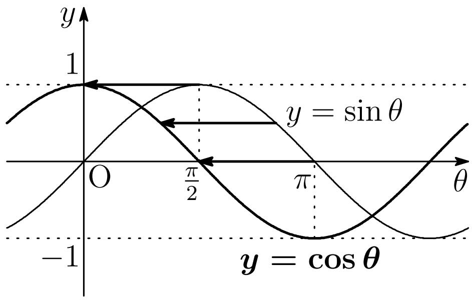


なお，140 ページの図で，θ の動径の位置に着目すると，

$y=\cos\theta$ のグラフは，

$y=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$ のグラフ

とみることもできる．
すなわち，両者のグラフは同じである．



練習 4.8 次の関数のグラフをかけ.

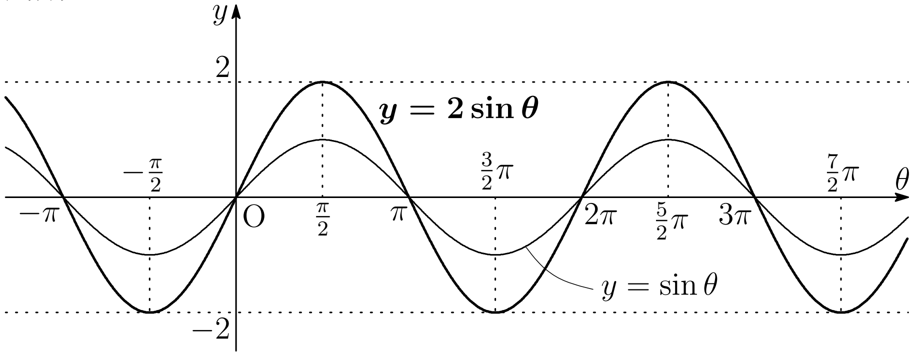
(1) $y = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$

(2) $y = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$

(3) $y = \tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

例 4.5 $y = 2\sin\theta$ のグラフ

このグラフは，$y = \sin\theta$ のグラフを，θ 軸をもとにして y 軸方向へ 2 倍に拡大したもので，次のようになる．
周期は 2π である．



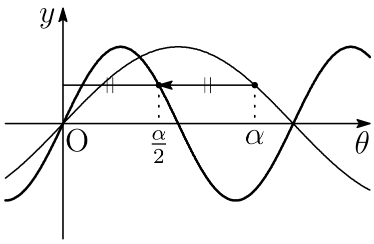
練習 4.9 次の関数のグラフをかけ．また，その周期を求めよ．

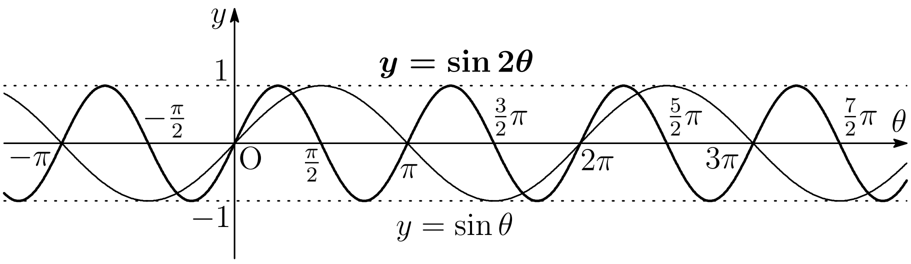
(1) $y = 2\cos\theta$

(2) $y = \dfrac{1}{2}\sin\theta$

例 4.6 $\boldsymbol{y = \sin 2\theta}$ **のグラフ**

$\theta = \frac{\alpha}{2}$ における $\sin 2\theta$ の値と，$\theta = \alpha$ における $\sin\theta$ の値が等しい．したがって，このグラフは，$y = \sin\theta$ のグラフを，y 軸をもとにして θ 軸方向へ $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したもので，次のようになる．





例 4.6 の図からわかるように，$\sin 2\theta$ の周期は π である．この周期 π は，$\sin\theta$ の周期 2π の $\dfrac{1}{2}$ 倍である．一般に，次のことがいえる．

> k を正の定数とするとき
> $\sin k\theta$，$\cos k\theta$ の周期はともに $\dfrac{2\pi}{k}$ である．
> $\tan k\theta$ の周期は $\dfrac{\pi}{k}$ である．

$\longleftarrow$ $\sin(k\theta+2\pi)=\sin k\theta$
から
$\sin k\left(\theta+\frac{2\pi}{k}\right)=\sin k\theta$

練習 4.10 次の関数のグラフをかけ．また，その周期を求めよ．

(1) $y = \cos 2\theta$

(2) $y = \sin\dfrac{\theta}{2}$

(3) $y = \tan 2\theta$

研究

周期関数

三角関数の大きな特徴は，周期をもつということである．
一般に，実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ が，0 でない定数 p に対して，常に

$$f(x+p) = f(x)$$

を満たすとき，関数 $f(x)$ は p を周期とする**周期関数**であるという．このとき，

$$f(x+2p) = f((x+p)+p) = f(x+p) = f(x)$$

となるから，$2p$ も周期である．同様に，$3p$，$-p$ なども周期である．しかし，周期関数の周期といえば，ふつう正の周期のうち最小のものをさす．

4.1.3 三角関数の性質

三角関数の相互関係や，$\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta$，$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$ などの性質について調べてみよう．

A 三角関数の相互関係

三角比と同様に，三角関数についても次の相互関係が成り立つ．

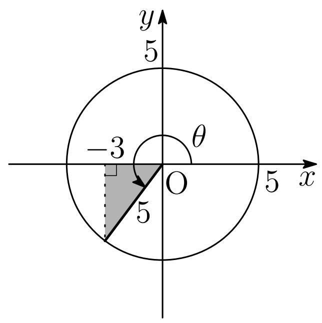
三角関数の相互関係

1 $\boldsymbol{\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$　　**3** $\boldsymbol{1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}}$

2 $\boldsymbol{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$

例題 4.1 θ の動径が第 3 象限にあり，$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ．

【解】 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{16}{25}$



θ の動径が第 3 象限にあるとき，$\sin\theta<0$ であるから

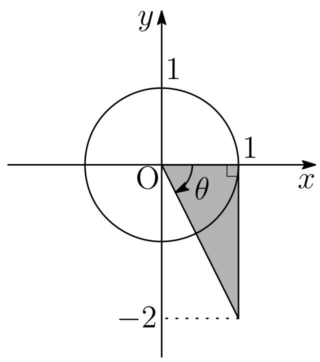
$$\sin\theta=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}$$

また
$$\begin{aligned}\tan\theta&=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\frac{4}{5}\right)\div\left(-\frac{3}{5}\right)\\&=\left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

練習 4.11 θ の動径が第 4 象限にあり，$\sin\theta=-\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ．

例題 4.2 θ の動径が第 4 象限にあり，$\tan\theta = -2$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ．

【解】 $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{1}{1+(-2)^2} = \dfrac{1}{5}$



θ の動径が第 4 象限にあるとき，

$\cos\theta > 0$ であるから

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

また　$\sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta = (-2)\times\dfrac{1}{\sqrt{5}} = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

練習 4.12 θ の動径が第 3 象限にあり，$\tan\theta = 3$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ．

B 三角関数を含む等式

例題 4.3 次の等式を証明せよ．

$$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

[証明]

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} && \leftarrow \tfrac{1}{\tan\theta}=\tfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \\
&= \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \\
&= \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} && \leftarrow \sin^2\theta+\cos^2\theta=1
\end{aligned}$$

よって　$\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$　**[証終]**

練習 4.13 次の等式を証明せよ.

(1) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 2$

(2) $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$

応用例題 4.1 $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ.

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\sin^3\theta + \cos^3\theta$

考え方 (1) $\sin\theta\cos\theta$ は $(\sin\theta + \cos\theta)^2$ の展開式に現れる.
(2) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ が利用できる.

【解】

(1) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$$ ← $\sin^2\theta{+}\cos^2\theta{=}1$

よって　$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{4}$

したがって　$\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{3}{8}$

(2)
$$\begin{aligned}\sin^3\theta + \cos^3\theta &= (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)\\ &= (\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)\\ &= \frac{1}{2}\left\{1 - \left(-\frac{3}{8}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{11}{8} = \frac{11}{16}\end{aligned}$$

練習 4.14 $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\sin^3\theta + \cos^3\theta$

練習 4.15 $\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\sin^3\theta - \cos^3\theta$

C 三角関数で成り立つ等式

三角関数の周期性は，次の等式で表される．

$$\mathbf{1}\ \begin{cases} \sin(\boldsymbol{\theta}+2n\boldsymbol{\pi})=\sin\boldsymbol{\theta} \\ \cos(\boldsymbol{\theta}+2n\boldsymbol{\pi})=\cos\boldsymbol{\theta} \quad \text{ただし，} n \text{ は整数} \\ \tan(\boldsymbol{\theta}+n\boldsymbol{\pi})=\tan\boldsymbol{\theta} \end{cases}$$

$\longleftarrow \tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta$ も成り立つ．

例 4.7　(1)　$\sin\frac{13}{3}\pi=\sin\frac{7}{3}\pi=\sin\frac{\pi}{3}$　　$\leftarrow \frac{13}{3}\pi=\frac{\pi}{3}+4\pi$

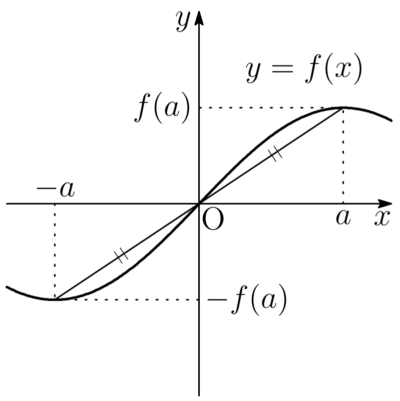
(2)　$\tan\frac{7}{3}\pi=\tan\frac{4}{3}\pi=\tan\frac{\pi}{3}$　　$\leftarrow \frac{7}{3}\pi=\frac{\pi}{3}+2\pi$

次に，三角関数のグラフの対称性に着目してみよう．
一般に，関数 $y=f(x)$ について，次のことがいえる．

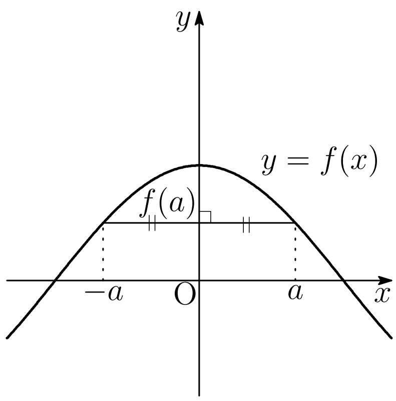
［1］ $f(-x)=-f(x)$ が成り立つとき，グラフは原点について対称．

［2］ $f(-x)=f(x)$ が成り立つとき，グラフは y 軸について対称．

［1］



［2］



三角関数のグラフの対称性は，次の等式で表される．

$$\mathbf{2}\ \begin{cases} \sin(-\boldsymbol{\theta})=-\sin\boldsymbol{\theta} \\ \cos(-\boldsymbol{\theta})=\cos\boldsymbol{\theta} \\ \tan(-\boldsymbol{\theta})=-\tan\boldsymbol{\theta} \end{cases}$$

$\longleftarrow$ $y=\sin\theta$ 　のグラフは原点について対称
$y=\cos\theta$ 　のグラフは y 軸について対称
$y=\tan\theta$ 　のグラフは原点について対称

例 4.8　(1)　$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　$\cos\left(-\frac{13}{3}\pi\right)=\cos\frac{13}{3}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{3}+4\pi\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

練習 4.16 次の値を求めよ．

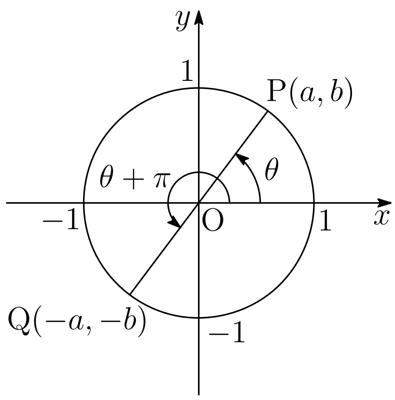
(1) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$　(2) $\cos\left(-\dfrac{13}{6}\pi\right)$　(3) $\tan\left(-\dfrac{9}{4}\pi\right)$

下の図［1］と［2］からは，次の等式が成り立つことがわかる．

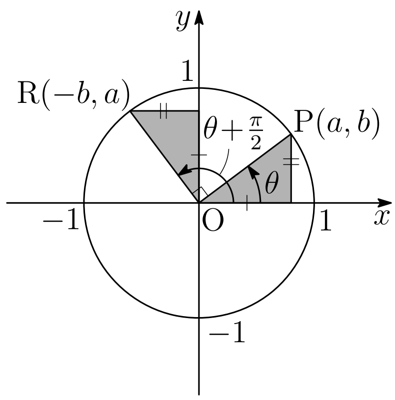
$$\mathbf{3}\begin{cases}\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta\\ \cos(\theta+\pi)=-\cos\theta\\ \tan(\theta+\pi)=\tan\theta\end{cases}$$

$$\mathbf{4}\begin{cases}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\theta\\ \cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta\\ \tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\tan\theta}\end{cases}$$

［1］



［2］



$a=\cos\theta$，$b=\sin\theta$ から

$\sin(\theta+\pi)=-b=-\sin\theta$

$\cos(\theta+\pi)=-a=-\cos\theta$

など

$a=\cos\theta$，$b=\sin\theta$ から

$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=a=\cos\theta$

$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-b=-\sin\theta$

など

4.1.4　三角関数についての方程式・不等式

三角関数についての方程式・不等式を，単位円や関数の周期性，グラフなどを利用して解いてみよう．

A 三角関数についての方程式

例題 4.4 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け．

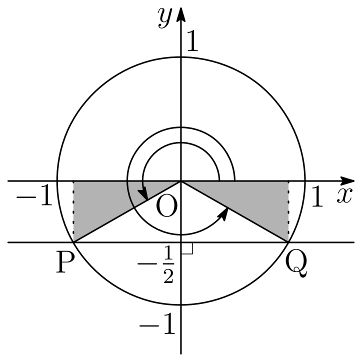
$$2\sin\theta + 1 = 0$$

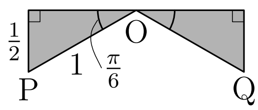
【解】 方程式を変形すると

$$\sin\theta = -\frac{1}{2}$$

求める角 θ の動径と単位円の交点の y 座標は $-\dfrac{1}{2}$ である．
よって，右の図の動径 OP，OQ の表す角が求める θ である．
$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では

$$\theta = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$





上の例題 4.4 で，θ の範囲を制限しなければ，151 ページの性質 **1** により，解は次のようになる．

$$\theta = \frac{7}{6}\pi + 2n\pi,\ \theta = \frac{11}{6}\pi + 2n\pi \qquad (n \text{ は整数})$$

練習 4.17 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け．

(1) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $2\cos\theta + 1 = 0$　　(3) $\sin\theta + 1 = 0$

例題 4.5 次の方程式を解け.

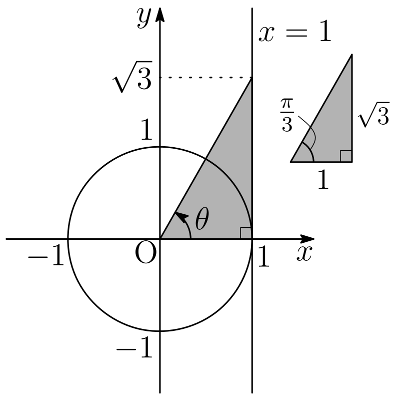
$$\tan\theta = \sqrt{3}$$

【解】 求める角 θ の動径と直線 $x=1$ の交点の y 座標は，$\sqrt{3}$ である．
よって，$0 \leqq \theta < \pi$ の範囲では

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

したがって，方程式の解は

$$\theta = \frac{\pi}{3} + n\pi \quad (n\text{ は整数})$$



練習 4.18 次の方程式を解け.

(1) $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(2) $\tan\theta = -\sqrt{3}$

応用例題 4.2 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け．

$$5\sin\theta - 2\cos^2\theta + 4 = 0$$

考え方　$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ を利用すると，$\sin\theta$ の 2 次方程式が得られる．$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ に注意して解く．

【解】 方程式を変形すると

$$5\sin\theta - 2(1 - \sin^2\theta) + 4 = 0$$

$$2\sin^2\theta + 5\sin\theta + 2 = 0$$

因数分解すると　$(2\sin\theta + 1)(\sin\theta + 2) = 0$

$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ であるから　$2\sin\theta + 1 = 0$　$\longleftarrow \sin\theta + 2 > 0$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$ を解くと　$\longleftarrow$ 例題 4.4 参照

$$\theta = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

練習 4.19 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け．

(1) $2\cos^2\theta + 5\sin\theta - 4 = 0$　　(2) $2\sin^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$

B 三角関数についての不等式

例題 4.6 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け．

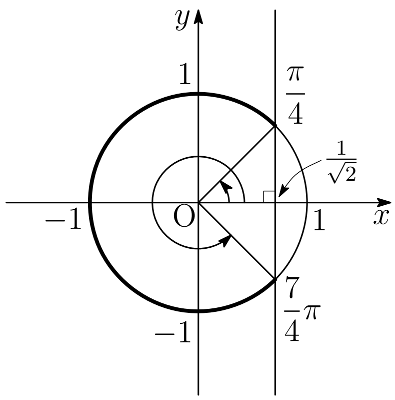
$$\cos\theta \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

【解】 $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる θ は

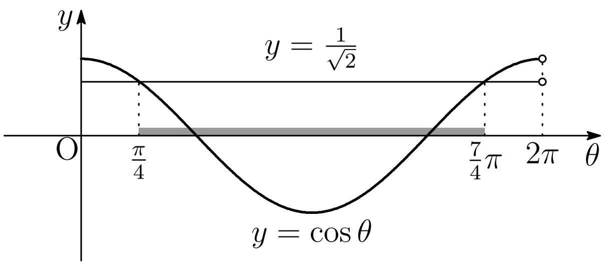
$$\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi$$

よって，不等式の解は，右の図から

$$\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{7}{4}\pi$$



例題 4.6 の不等式を解くのに，右の図のように，$y = \cos\theta$ のグラフと直線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の位置関係を利用してもよい．



なお，$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\cos\theta > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の解は

$$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi < \theta < 2\pi$$

練習 4.20 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け．

(1) $\sin\theta > \dfrac{1}{2}$　　(2) $\cos\theta \geqq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan\theta < 1$

4.1.5　補充問題

1 次の$\boxed{}$に適する数を求めよ．

(1) $(\sin\theta + 2\cos\theta)^2 + (2\sin\theta - \cos\theta)^2 = \boxed{}$

(2) $\cos(\theta+\pi) + \cos(-\theta) = \boxed{}$

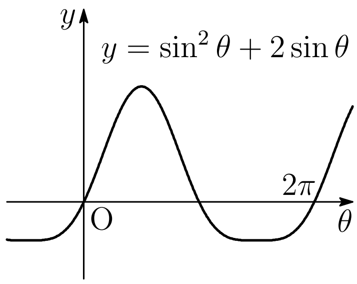
2 次の方程式を解け．

(1) $2\sin\theta = -\sqrt{3}$　　(2) $\sqrt{2}\cos\theta = -1$

3 関数 $y = \sin^2\theta + 2\sin\theta$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\sin\theta = x$ とおいて，y を
$y = a(x-p)^2 + q$ の形に表せ．

(2) y の最大値，最小値を求めよ．



【答】

1 (1) 5　(2) 0

2 (1) $\theta = \dfrac{4}{3}\pi + 2n\pi$，$\theta = \dfrac{5}{3}\pi + 2n\pi$　(n は整数)

(2) $\theta = \dfrac{3}{4}\pi + 2n\pi$，$\theta = \dfrac{5}{4}\pi + 2n\pi$　(n は整数)

3 (1) $y = (x+1)^2 - 1$　(2) 最大値 3，最小値 -1

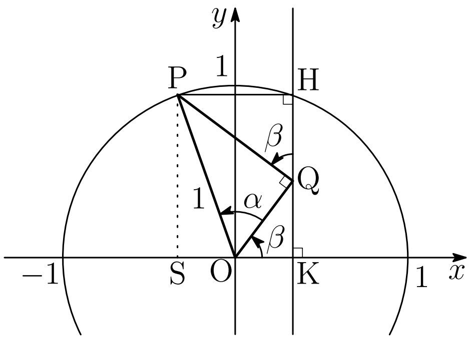
4.2 加法定理

4.2.1 三角関数の加法定理

2 つの角 α，β の正弦・余弦を用いて，$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$ などを表してみよう．また，α，β の正接を用いて，$\tan(\alpha+\beta)$ などを表してみよう．

A 正弦・余弦の加法定理

右の図において，点 P の y 座標は $\sin(\alpha+\beta)$ であるから



$$\sin(\alpha+\beta)=\mathrm{HK}=\mathrm{HQ}+\mathrm{QK}$$

となる．ここで

$$\mathrm{HQ}=\mathrm{PQ}\cos\beta=\sin\alpha\cos\beta$$
$$\mathrm{QK}=\mathrm{OQ}\sin\beta=\cos\alpha\sin\beta$$

よって，次の等式が得られる．

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad \cdots ①$$

同様に，点 P の x 座標 $\cos(\alpha+\beta)$ について考えると

$$\cos(\alpha+\beta)=-\mathrm{OS}=\mathrm{OK}-\mathrm{PH}$$
$$\mathrm{OK}=\mathrm{OQ}\cos\beta=\cos\alpha\cos\beta,\quad \mathrm{PH}=\mathrm{PQ}\sin\beta=\sin\alpha\sin\beta$$

であるから，次の等式が得られる．

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad \cdots ②$$

上で得られた等式 ①，② は，一般角 α，β に対しても成り立つ．

練習 4.21 上の ①，② で，β を $-\beta$ におきかえることにより，次の等式を導け．

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

一般に，正弦・余弦について，次の**加法定理**が成り立つ.

正弦・余弦の加法定理

1 $\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$

2 $\boldsymbol{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$

3 $\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$

4 $\boldsymbol{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$

上の加法定理を使って，75°，15° の正弦・余弦を求めてみよう.

例 4.9

(1)
$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ+30^\circ)\\ &= \sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ-30^\circ)\\ &= \sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

練習 4.22 加法定理を用いて，次の値を求めよ.

(1) $\cos 75^\circ$

(2) $\cos 15^\circ$

B 正接の加法定理

正弦・余弦の加法定理から，正接の加法定理が得られる．

正接の加法定理

5 $$\boldsymbol{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}$$

6 $$\boldsymbol{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}}$$

[証明] $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$ であるから

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

右辺の分母と分子を $\cos\alpha\cos\beta$ で割って変形すると

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

公式 **5** で β を $-\beta$ におきかえると，公式 **6** が得られる． **[証終]**

例 4.10

$$\begin{aligned}\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)&=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}\\&=\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}\\&=\frac{3+2\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3})^2-1^2}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}\end{aligned}$$

練習 4.23 加法定理を用いて，次の値を求めよ．

(1) $\tan 105^\circ$　　(2) $\tan 15^\circ$

例題 4.7 $\tan\alpha = -2$，$\tan\beta = 3$ のとき，$\tan(\alpha - \beta)$ の値を求めよ．また，$\alpha - \beta$ を求めよ．ただし，$0^\circ < \alpha - \beta < 90^\circ$ とする．

【解】
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{-2-3}{1+(-2)\cdot 3} = 1$$

$0^\circ < \alpha - \beta < 90^\circ$ の範囲で $\tan(\alpha - \beta) = 1$ を満たす $\alpha - \beta$ は

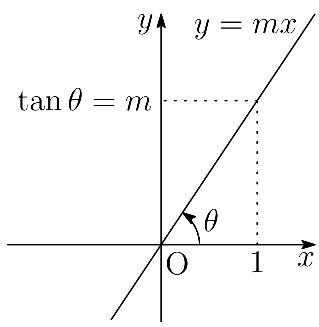
$$\alpha - \beta = 45^\circ$$

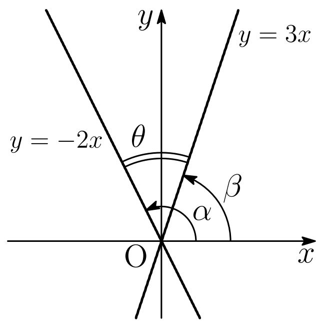
練習 4.24 $\tan\alpha = 2$，$\tan\beta = 3$ のとき，$\tan(\alpha + \beta)$ の値を求めよ．また，$\alpha + \beta$ を求めよ．ただし，$0^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ$ とする．

研究

2 直線の作る鋭角

右の図のように，x 軸の正の部分から直線 $y = mx$ まで測った角を θ とすると，$\tan\theta = m$ である．
このことを利用して，たとえば，2 直線 $y = -2x$，$y = 3x$ の作る鋭角を求めてみよう．
x 軸の正の部分から 2 直線まで測った角を，図のように α，β とすると，$\tan\alpha = -2$，$\tan\beta = 3$ であり，求める鋭角を θ とすると，$\theta = \alpha - \beta$ である．
この $\alpha - \beta$ は例題 4.7 で求めているように，45° である．





4.2.2 加法定理の応用

正弦・余弦の加法定理

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

を使って，$\sin\alpha$，$\cos\alpha$ から $\sin 2\alpha$ や $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ などを求める公式を導こう．

A 2倍角の公式，半角の公式

正弦・余弦の加法定理の各等式で $\beta=\alpha$ とすると，正弦・余弦について，次の **2倍角の公式** が得られる．

正弦・余弦の 2 倍角の公式

1 $\quad \boldsymbol{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha}$

2 $\quad \begin{cases} \boldsymbol{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} \\ \boldsymbol{\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha} \\ \boldsymbol{\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1} \end{cases}$

←$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$
$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$
を代入している．

例題 4.8 等式 $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\tan\alpha$ が成り立つことを証明せよ．

[証明] 2 倍角の公式により

$$左辺=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+(2\cos^2\alpha-1)}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$$

よって $\qquad \dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\tan\alpha$ **[証終]**

練習 4.25 次の等式が成り立つことを証明せよ．

(1) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+\sin 2\alpha$

(2) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$

前のページに示した2倍角の公式**2**によると

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}, \qquad \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

←公式で α を $\frac{\alpha}{2}$ におきかえる.

となる. これより, 正弦・余弦について, 次の**半角の公式**が得られる.

正弦・余弦の半角の公式

$$\boldsymbol{\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

例 4.11 半角の公式を使って, $\cos\frac{\pi}{8}$ の値を求める.

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{8} > 0 \text{ より} \qquad \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

練習 4.26 半角の公式を使って, $\sin\frac{\pi}{8}$ の値を求めよ.

正接の 2 倍角，半角については，次の公式が成り立つ．

正接の 2 倍角，半角の公式

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}, \qquad \tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

練習 4.27 上の公式が成り立つことを確かめよ．また，次の値を求めよ．

(1) $\tan\alpha = -3$ のとき，$\tan 2\alpha$ の値

(2) $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ で，$\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$ のとき，$\tan\dfrac{\alpha}{2}$ の値

応用例題 4.3 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け.

$$\cos 2\theta + \cos\theta + 1 = 0$$

考え方　2 倍角の公式を使って，$\cos\theta$ の 2 次方程式を導く.

【解】 左辺を変形すると　$(2\cos^2\theta - 1) + \cos\theta + 1 = 0$

整理すると　$\cos\theta(2\cos\theta + 1) = 0$

よって　$\cos\theta = 0$　または　$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，　$\cos\theta = 0$ から　$\theta = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ から　$\theta = \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

(答) $\theta = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

練習 4.28 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け.

(1) $\cos 2\theta + \sin\theta = 1$

(2) $\sin 2\theta + \cos\theta = 0$

B $\boldsymbol{a\sin\theta + b\cos\theta}$ の変形

たとえば，次の等式が成り立つ．

$$\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

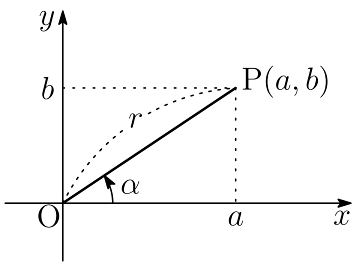
[証明]

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= 2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) \\
&= \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = \text{左辺}
\end{aligned}$$

[証終]

一般に，$a\sin\theta + b\cos\theta$ の形の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形する方法を考えてみよう．

右の図のように，座標平面上に座標が $(a,\ b)$ である点 P をとる．x 軸の正の部分から線分 OP まで測った角を α とし，OP $= r$ とすると



$$r\cos\alpha = a,\ r\sin\alpha = b$$

である．よって

$$\begin{aligned}
a\sin\theta + b\cos\theta &= r\cos\alpha\sin\theta + r\sin\alpha\cos\theta \\
&= r(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha) \\
&= r\sin(\theta+\alpha)
\end{aligned}$$

ここで，$r = \sqrt{a^2+b^2}$ であるから，次のことが成り立つ．

$\boldsymbol{a\sin\theta + b\cos\theta}$ の変形

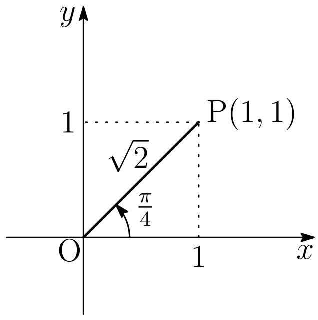
$$\boldsymbol{a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)}$$

ただし　$\boldsymbol{\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

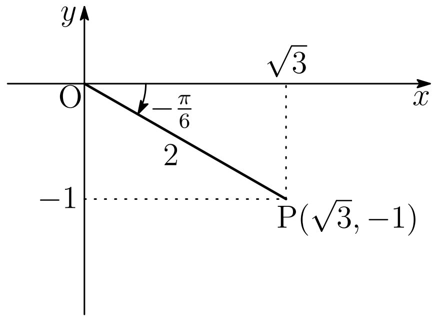
例 4.12　(1)　$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$

(2)　$\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 2\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right)$

(1)



(2)



練習 4.29 次の式を $r\sin(\theta + \alpha)$ の形に表せ．ただし，$-\pi < \alpha < \pi$ とする．

(1) $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$

(2) $\sin\theta - \cos\theta$

例題 4.9 次の関数の最大値，最小値を求めよ．

$$y = \sin x + \cos x$$

【解】 $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから　　　←例 4.12(1) 参照

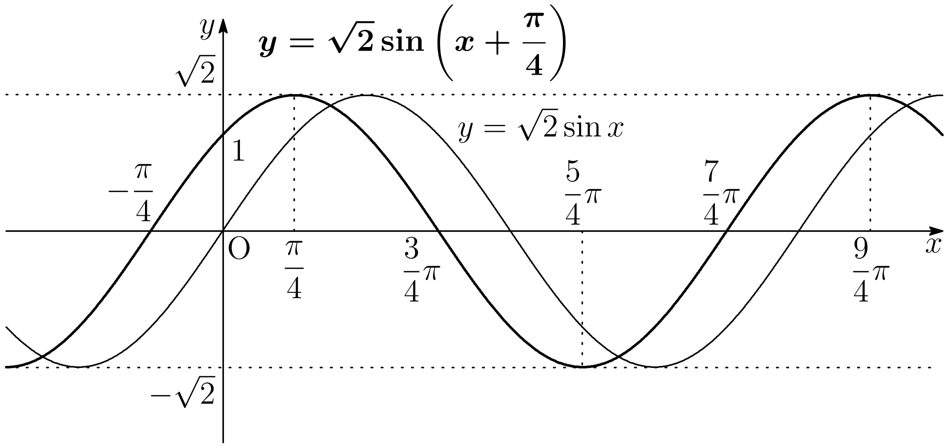
$$y = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$-1 \leqq \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leqq 1$ であるから

$$-\sqrt{2} \leqq y \leqq \sqrt{2}$$

したがって　　y の最大値は $\sqrt{2}$，最小値は $-\sqrt{2}$

関数 $y = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ のグラフは，次のようになる．



上のグラフは，$y = \sqrt{2}\sin x$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ平行移動したものである．

練習 4.30 次の関数の最大値，最小値を求めよ．また，そのグラフをかけ．

$$y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$$

応用例題 4.4 $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け．

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$$

考え方　方程式の左辺を $r\sin(x+\alpha)$ の形に変形する．
次に，$x+\alpha$ の範囲に注意して，$\sin(x+\alpha)$ の値から $x+\alpha$ を求める．

【解】 左辺を変形すると

$$2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$$

よって　$$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \quad \cdots ①$$

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき

$$-\frac{\pi}{6} \leqq x-\frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$$

であるから，この範囲で ① を解くと

$$x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6} \quad \text{または} \quad x-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\pi$$

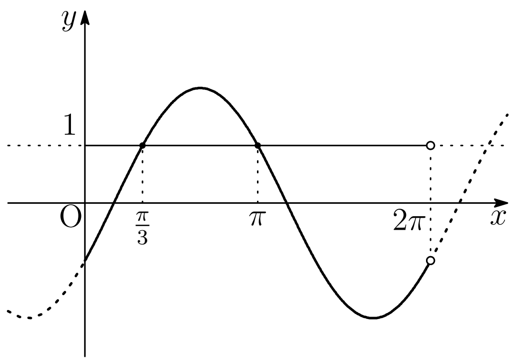
したがって　$$x=\frac{\pi}{3},\ \pi$$

上の応用例題 4.4 で求めた方程式の解は，$0 \leqq x < 2\pi$ における関数

$y=\sqrt{3}\sin x - \cos x$

$y=1$

のグラフの交点の x 座標である．



練習 4.31 $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け.

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$$

4.2.3 補充問題

4 次の等式が成り立つことを証明せよ.

(1) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

(2) $\cos 3\alpha = -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha$

5 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け．

(1) $\sin 2\theta \geqq \sin\theta$

(2) $\cos 2\theta < \sin\theta + 1$

6 次の関数の最大値，最小値を求めよ．また，そのグラフをかけ．

$$y = \sin x - \cos x$$

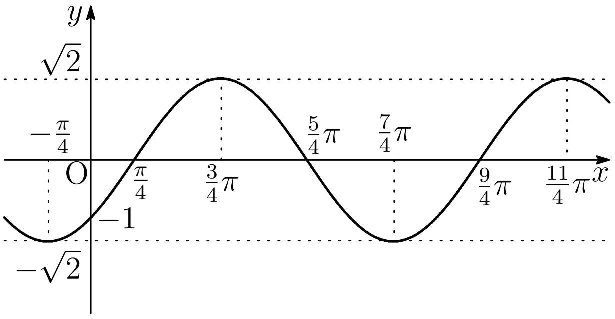
7 関数 $y = \sin x + 2\cos x$ について，最大値，最小値を求めよ．

【答】

4　［$3\alpha = 2\alpha + \alpha$ として加法定理を用いる］

5 (1) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$，$\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{3}\pi$　　(2) $0 < \theta < \pi$，$\dfrac{7}{6}\pi < \theta < \dfrac{11}{6}\pi$

6 最大値 $\sqrt{2}$，最小値 $-\sqrt{2}$



7 最大値 $\sqrt{5}$，最小値 $-\sqrt{5}$

4.3　章末問題

4.3.1　章末問題 A

1 次の値を求めよ.

(1) $\sin\dfrac{16}{3}\pi$　(2) $\cos\dfrac{7}{2}\pi$　(3) $\tan\left(-\dfrac{11}{6}\pi\right)$

2 次の関数のグラフをかけ.

(1) $y = \cos\dfrac{\theta}{2}$

(2) $y = 2\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$

3 次の等式を証明せよ.

(1) $\dfrac{\tan\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\sin\theta}{\tan\theta} = \sin\theta\tan\theta$

(2) $\dfrac{1}{\tan\theta} - \tan\theta = \dfrac{2\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

4 $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け.

(1) $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$

(2) $\cos 2x = \cos x$

5 加法定理を用いて，次の等式が成り立つことを示せ．

(1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$　(2) $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

6 α，β の動径がいずれも第 4 象限にあり，$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\cos\beta=\frac{4}{5}$ のとき，次の値を求めよ．

(1) $\cos\alpha$　(2) $\sin\beta$　(3) $\sin(\alpha+\beta)$

(4) $\sin(\alpha-\beta)$　(5) $\cos(\alpha+\beta)$　(6) $\cos(\alpha-\beta)$

7 関数 $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ について，次のものを求めよ．

(1)　最大値と最小値　　(2)　$y = 0$ となる x の値

(3)　$y \leqq 0$ となる x の値の範囲

4.3.2　章末問題 B

8 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数 $y = \cos^2\theta + 2\sin\theta$ が最小となる θ と，y の最小値を求めよ．

9 次の値を求めよ．

(1) $\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{2}$，$\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos(\alpha-\beta)$ の値

(2) $\tan\alpha=2$，$\tan\beta=4$，$\tan\gamma=13$ のとき，$\tan(\alpha+\beta+\gamma)$ の値

10 次の等式を証明せよ．

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$$

11 次の関数のグラフをかけ．また，その周期を求めよ．

(1) $y = \dfrac{1}{2}\sin 2x$

(2) $y = \cos^2 x$

12 次の問いに答えよ．

(1) 等式 $\sin 3x + \sin x = 2\sin 2x \cos x$ が成り立つことを示せ．

(2) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin 3x + \sin x = 0$ を解け．

13 次の関数の最大値，最小値を求めよ．

$$y = \sin x \cos x - \sin^2 x + \frac{1}{2} \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

ヒント

9 (1) $\cos\alpha\cos\beta$，$\sin\alpha\sin\beta$ の値が必要． $\tan\{(\alpha+\beta)+\gamma\}$

11 (2) 半角の公式を利用する． **12** (1) $\sin 3x = \sin(2x + x)$

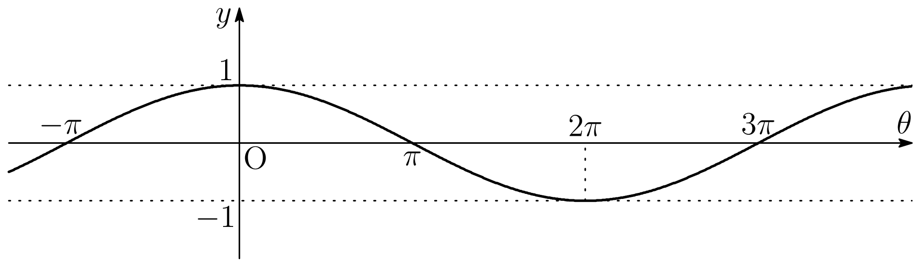
13 2 倍角の公式，半角の公式と $a\sin\theta + b\cos\theta$ の変形を用いる．

【答】

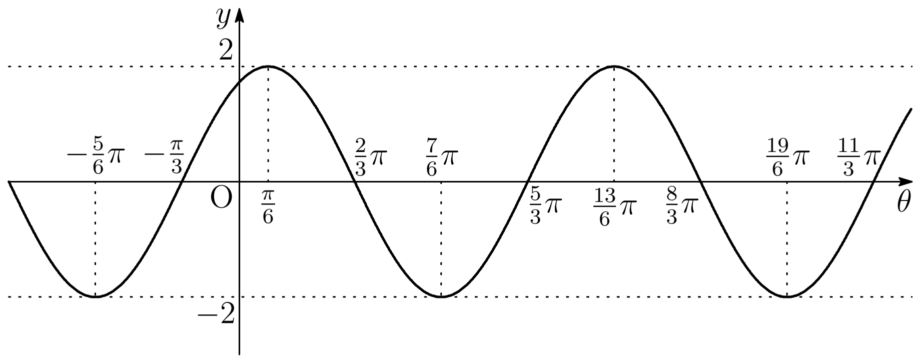
1 (1) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (2) 0 (3) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

2

(1)



(2)



3 $\left[\ (1)\ 左辺 = \dfrac{1}{\cos\theta} - \cos\theta \quad (2)\ 左辺 = \dfrac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\ \right]$

4 (1) $x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$　(2) $x = 0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

5　(1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\dfrac{\pi}{2}\cos\theta - \cos\dfrac{\pi}{2}\sin\theta$

$$= 1\cdot\cos\theta - 0\cdot\sin\theta = \cos\theta$$

(2) $\cos(\pi - \theta) = \cos\pi\cos\theta + \sin\pi\sin\theta$

$$= -1\cdot\cos\theta + 0\cdot\sin\theta = -\cos\theta$$

6 (1) $\dfrac{4}{5}$　(2) $-\dfrac{3}{5}$　(3) $-\dfrac{24}{25}$　(4) 0　(5) $\dfrac{7}{25}$　(6) 1

7 (1) 最大値 2，最小値 -2　(2) $x = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{4}{3}\pi$

(3) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{4}{3}\pi \leqq x < 2\pi$　$\left[\ y = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)\ \right]$

8 $\theta = \dfrac{3}{2}\pi$ で最小値 -2　[$\sin\theta = x$ とおくと，$-1 \leqq x \leqq 1$ で $y = -(x-1)^2 + 2$]

9 (1) $-\dfrac{59}{72}$　(2) 1　$\left[\ (2)\ \tan(\alpha+\beta) = -\dfrac{6}{7}\right.$ を $\left.\dfrac{\tan(\alpha+\beta) + \tan\gamma}{1 - \tan(\alpha+\beta)\tan\gamma}\right.$ に代入$\left.\right]$

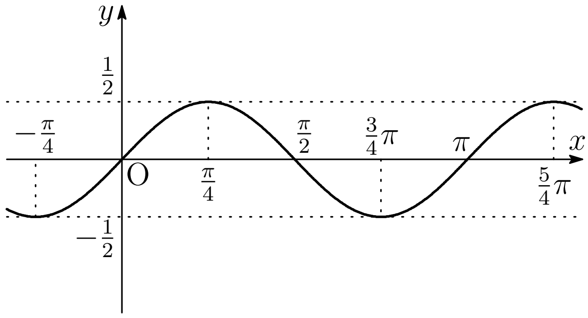
10

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

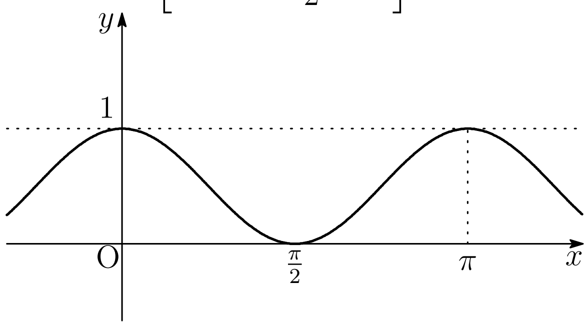
右辺の分母と分子を $\cos\alpha\cos\beta$ で割って変形すると

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$$

11 (1) 周期は π



(2) 周期は π $\left[\ y=\dfrac{1+\cos 2x}{2}\ \right]$



12 (1) $\sin 3x=\sin(2x+x)=\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x$

$\sin x=\sin(2x-x)=\sin 2x\cos x-\cos 2x\sin x$

の辺々を加えるとよい.

(2) $x=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$ [(2) (1) より $\sin 2x=0$ または $\cos x=0$]

13 $x=\dfrac{\pi}{8}$ で最大値 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x=\dfrac{5}{8}\pi$ で最小値 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\left[\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)\ \right]$